Projektityö M12

Johdanto

Projektityö sisältää kuutta tehtävää, kuitenkin ne kaikki koskevat saman yhtälön ratkaisua.

Yhtälö on $\sin(\frac{x}{2}) = e^{-2x}$ (1.1)

Sen ratkaisu voidaan käsitellä tutkimalla funktio $y = e^{-2x} - \sin(\frac{x}{2})$, sanotaan sen funktioksi $y = f(x)$ ja kuin funktio f(x) menee nollalle – **x** on yhtälön (1.1) ratkaisu.
Kuitenkin (1.1) on helpompi käsitellä, jos huomataan että funktio f(x) on yhdistelmä funktio.

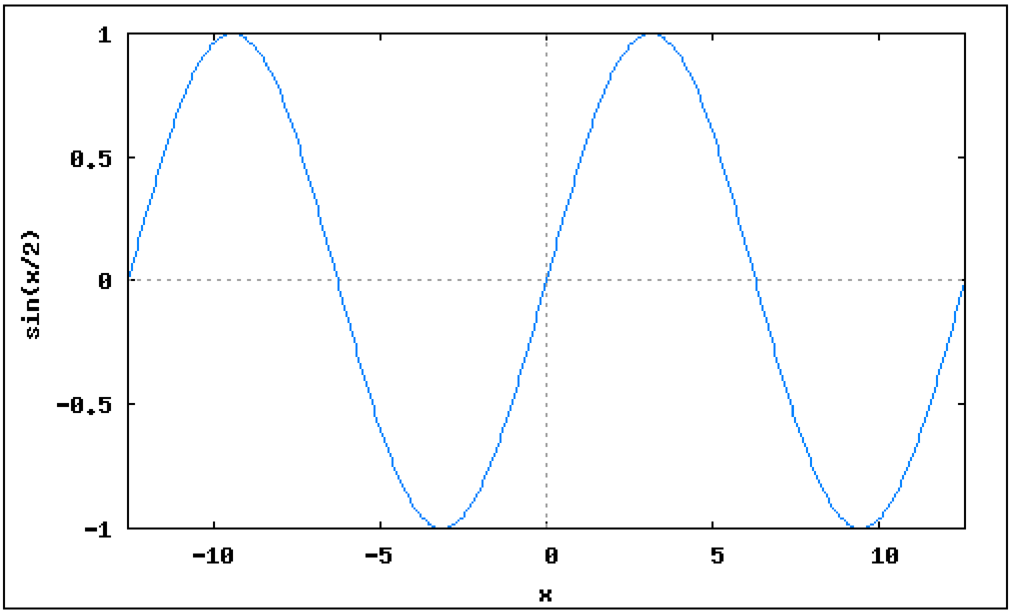
Siis on $f(x) = g(x) - h(x)$, missä on $g(x) = e^{-2x}$ (1.2), ja on $h(x) = \sin(\frac{x}{2})$ (1.3)

Funktio h(x) on jaksollinen funktio, ja sen jakso on $\frac{x}{2} = 2\pi$, eli $x = \pi * 4$ (tehtävässä ei mainittu, mutta käytetään radiaaneja). Käytännössä se tarkoita että funktio toistuu joka $\pi * 4$ jakson välein.

Lähde: http://fi.wikipedia.org/wiki/Jaksollinen_funktio

> **Jaksollinen funktio** on sellainen funktio, joka toistuu samanlaisena tietyn jakson välein. Jaksollisen funktion argumenttia kutsutaan vaiheeksi (engl. phase).

Ja sen kuva:



Funktio g(x) on x akselin asymptootti, eikä leikkaa akselin, kuitenkin sitä pitää perusta.

Lähde: http://fi.wikipedia.org/wiki/Asymptootti

> **Asymptootti** on suora tai käyrä A, mitä toinen käyrä B lähestyy äärettömyydessä. Kun B:tä kuljetaan eteenpäin rajatta, etäisyys A:n ja B:n välillä kutistuu kohti nollaa. On myös mahdollista, että käyrä leikkaa asymptoottiaan, jopa äärettömän monta kertaa.

Se, että g(x) ei leikkaa x akselin, tai $g(x)\neq 0$ helppo todista siitä, että vakio joka ei ole nolla, kerrottu itsellä myös ei voi olla nolla, eikö se voi olla negatiivinen, koska vakio ei ole negatiivinen($e\approx 2,718281828459...$).

Se, että g(x) lähestyy äärimäisesti x akselin todetaan induktiolla:

$$\frac{1}{e^{2x}}>\frac{1}{e^{2x+1}} \quad (*e^{2x}$$

$$\frac{1}{1}>\frac{e^{2x}}{e^{2x+1}}$$

$$1>\frac{1}{e}$$

$1/e\approx 0.36787944117144...$ eli toteudu.

Lisätään yksi: (x=x+1)

$$\frac{1}{e^{2(x+1)}}>\frac{1}{e^{2(x+1)+1}} \quad (*e^{2(x+1)}$$

$$\frac{1}{1}>\frac{e^{2(x+1)}}{e^{2(x+1)+1}}$$

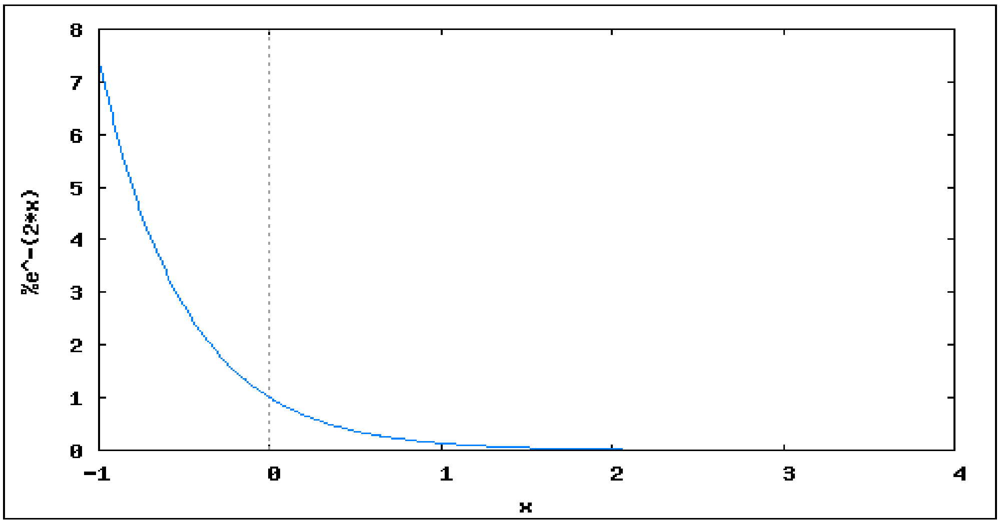
$$1>\frac{1}{e}$$

$1/e\approx 0.36787944117144...$ myös toteudu, eli g(x) asymptootti, eikä leikkaa missään x akselin.

Lisäksi vielä pitäisi mainita, että $\sin(x)\leq 1$, johtuen siitä että hypotenuusa ei voi olla pitempi, kuin kateetti.

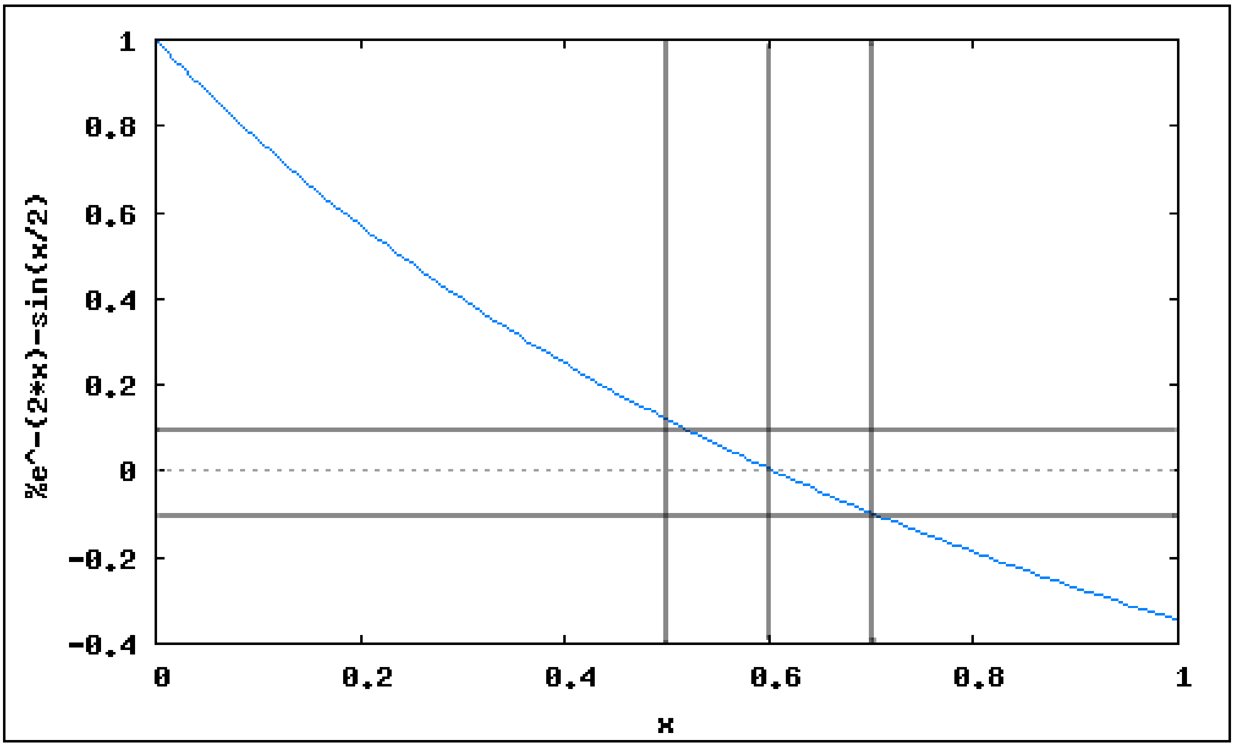
Myös pidetään mielessä että e^0 on 1, ja johtuen siitä että g(x) on x akeslin asymptootti, jos $x<0$ niin on $g(x)>1$, jos kuitenkin $x>0$ niin on $g(x)<1$

Yhtälön (1.1) juuret toteutuvat kun h(x)=g(x) (eli kun käyrät leikkaavat toinen toista) ja toteutuvat vain jos x>0. (Jos x<0, niin g(x)>1, ja h(x) ei voi olla suurempi kun 1) g(x) kuva:



1. Ratkaise yhtälön (1.1) pienin positiivinen juuri piirtämällä kuvaajat paperille, ja anna arvio yhden desimaalin tarkkuudella

f(x)=g(x)-h(x) kuva alueella]0,1[:



Eli kuvaaja leikkaa x akselin aika tarkasti 0.6 kohdalla.

Vastaus: 0.6

2. Ratkaise edellisen tehtävän yhtälö puolitus menetelmällä.

Otetaan samat rajat, kuin edellisellä tehtävällä -]0,1[.

0 – on helppo laskea, ja x ei voi olla pienempi kuin 0, eli se on hyvä vaihtoehto.

1- on helppo laskea.

a=0,b=1

f(a)	f(b)	c=(a+b)/2	f(c)	Tarkkuus>0.00
f(0)=(1)	f(1)=(-0.34409025536759)	0.5	f(0.5)=0.12047548191692 (a=c)	|0-f(c)|≈0.12
f(0.5)=0.12047548191692	f(1)=(-0.34409025536759)	0.75	f(0.75)= -0.14314236893762 (b=c)	|0-f(c)|≈0.14
f(0.5)=0.12047548191692	f(0.75)=- 0.14314236893762	0.625	f(0.625)= -0.020933717720191 (b=c)	|0-f(c)|≈0.02
f(0.5)=0.12047548191692	f(0.625)=-0.020933717720191	0.5625	f(0.5625)= 0.047095715712013 (a=c)	|0-f(c)|≈0.04
F(0.5625)= 0.047095715712013	F(0.625)= -0.020933717720191	0.59375	f(0.59375)= 0.012449426687732 (a=c)	|0-f(c)|≈0.01
f(0.59375)= 0.012449426687732	f(0.625)=-0.020933717720191	0.609375	f(0.609375)= -0.0043956480013123	|0-f(c)|≈0.00

f(0.61)≈0.00, eli **0.61** on yhtälön (1.1) ratkaisu 2 desimaalin tarkuudella.

Tarkistus:

f(0.615)=-0.010384274010162 (negatiivinen)

f(0.605)=2.8965753375331804*10^{-4} (positiivinen) ← Ok.

Vastaus: 0.61

3. Ratkaise yhtälö Newtonin menetelmällä

$$g'(x)=(e^{-2x})'=-2e^{-2x}$$

$$h'(x)=(\sin\frac{x}{2})'=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

eli

$$f'(x)=-2e^{-2x}-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Oletetaan alkuarvioksi $x_0=1$

$$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$$

x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1}=1-f(x_n)/f'(x_n)$	
1	-0.34409025536759	-0.70946184741841	0.51499822489445	0.xxxxxx
0.51499822489445	0.10234531022428	-1.19753139849535	0.60046179633222	0.xxxxxx
0.60046179633222	0.0051753753457652	-1.07946643343468	0.6052561791731	0.00xxxx
0.6052561791731	1.4641605442344829*10^{-5}	-1.073367338025915	0.60526981998825	0.00000x
0.60526981998825	**1.1784262454739292*10^{-10}**			**0.000000**

Eli jos z≈0.60526981998825**,** f(z) antaa kymmenen nolla desimaalissa, edellinen argumentti ei täytä ehtoa (vain viisi nolla, tarkkuutta ei riitä).

Pyöristetään z kuudeksi desimaaliksi, sadan z≈**0.605270**

Tarkistus:

f(0.6052705)=-7.2977251697192713*10^{-7} (negatiivinen)

f(0.6052695)=3.4357731470979758*10^{-7} (positiivinen) ← Ok.

Vastaus: 0.605270

4. Vertaile menetelmien tehokuutta

Newtonin menetelmä todennäköisesti tehokampi, kuitenkin kysymykseen voi lähestyä kahdella eri tavalla. Kohdassa 2 me olimme etsineet kaksi desimaalia, ja tehnet 5 iterointeja. Kohdassa 3 me olimme etsineet kuusi desimaalia, ja tehnet 4 iterointeja. Mikäli olisimme etsimässä kaksi desimaalia, olisimme tehneet vain kaksi.

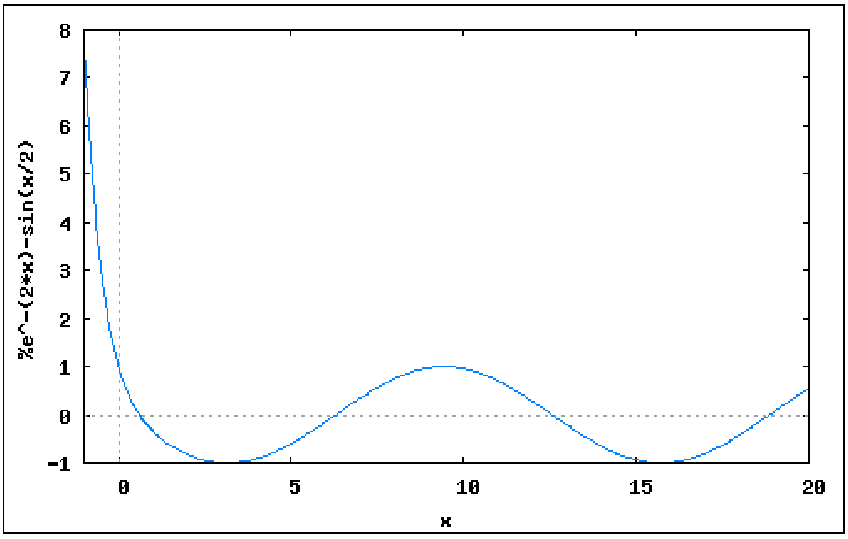
Vastaus: 5vs4 tai 5vs2, molemmissa tapauksissa Newtonin menetelmä on tehokampi. (Piirros on myös menetelmä, mutta tässä työssä ei sitä voidaan vertaa – ei siinä ole iterointeja)

5. Montako juurta yhtälöllä on yhteensä?

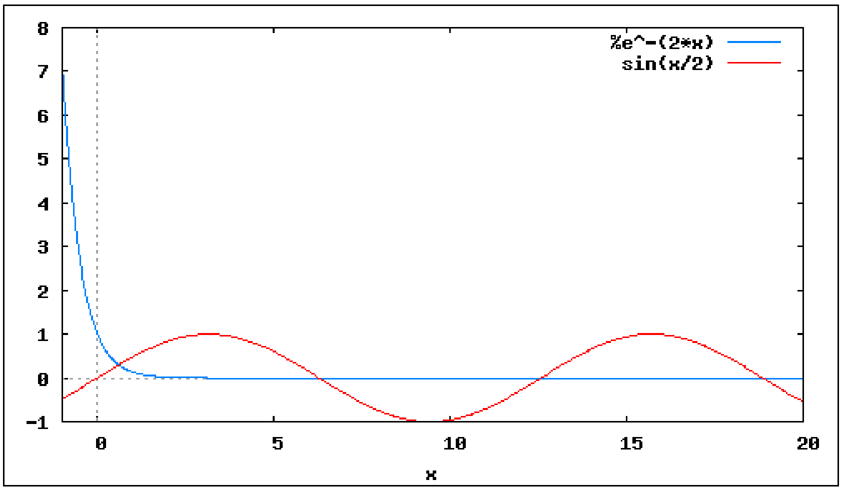
Kuten olimme jo todennut että g(x) on asymptootti x akselille, voidaan päätä, että ratkaisujen määrä (1.1):lle on sama kuin h(x)=0:lla, toisella tavalla: ratkaisujen on niin paljon, kun sin(x/2) käyrä leikkaa x akselin positiivinen puoli.

sin(x/2)=0:lla on 2πn ratkaisuja, missä n>0(jos n<0, niin g(x)>1, ja ei se ole mahdollista h(x):lle) ja n∈Z

Yhdistetty kuva:



g(x) ja h(x) erikseen:



Vastaus: ratkaisuja on niin paljon, kuin positiivisia kokonaislukuja.

Työhön oli käytetty: Maxima (http://wxmaxima.sourceforge.net/), OpenOffice (http://openoffice.org), kaksi Wikipedia artikkelia(ks. Johdanto).

Päivämäärä: 20.11.09+21.11.09