# Projektityö M12, osa 2

## *Johdanto*

Tässä projektityössä etsitään [2,3] välissä pinta-ala $1/x^3$ käyrälle.
Huvin vuoksi johdatan tarkka arvo.

$$\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{-1}{2x^2}$$

$$\int_2^3 1/x^3\, dx = -(1/(2*3^2)) + 1/(2*2^2) = 5/72$$

Lisäksi lisään kohta 3.5(i) – minun päässä pyöri oma menetelmä, haluaisin tarkista sen tehokkuus.

Määritellään myös että $\int_2^3 1/x^3\, dx$ on (1.1)

### *1. Laske (1.1) suorakaide säännöllä. (3 jakoväliä)*

Meidän väli on |2-3|=1, joka pitäisi jakaa 3lla, eli väli on 1/3.(d=1/3)

Suorakaide voisi laskea ”alkukulmasta”, ”loppukulmasta” tai ”keskipisteestä” (Kyllä, voidaankin tehdä ihan mistä vaan, mutta tämä on turha)

1a – Alkukulma

| **X arvot(Alku+askel*d)** | **f(X)** | **Pinta alat (f(X)*(d))** |
|---|---|---|
| 2+(1/3*0)=2 | 0.125 | 0.041666666666667 |
| 2+(1/3*1)=2 1/3 | 0.078717201166181 | 0.026239067055394 |
| 2+(1/3*2)=2 2/3 | 0.052734375 | 0.017578125 |

0.041666666666667+0.026239067055394+0.017578125=0.085483858722061

Ytl(5/72)=0.069444444444444

(Meidän tulo suurempi kun tarkka tulo sen takia, että käyrä on x akselin asymptootti positiivisella x arvolla. Todistus on samanlainen, kun osa 1, ja ei ole tarpeellinen tässä työssä)

Tuloarvoja ovat annettu yhden numeron tarkkuudella, mutta kuitenkin pyöristään vastauksen kolmelle desimaalille.

**Vastaus: 0.085**

1b – Loppukulma

| X arvot(Alku+d+askel*d) | f(X) | Pinta alat (f(X)*(d)) |
|---|---|---|
| 2+1/3+(1/3*0)=2 1/3 | 0.078717201166181 | 0.026239067055394 |
| 2+1/3+(1/3*1)=2 2/3 | 0.052734375 | 0.017578125 |
| 2+1/3+(1/3*2)=3 | 0.037037037037037 | 0.012345679012346 |

0.037037037037037+0.017578125+0.012345679012346=0.066960841049383

Ytl(5/72)=0.069444444444444

**Vastaus: 0.067**

1c – Keskipiste

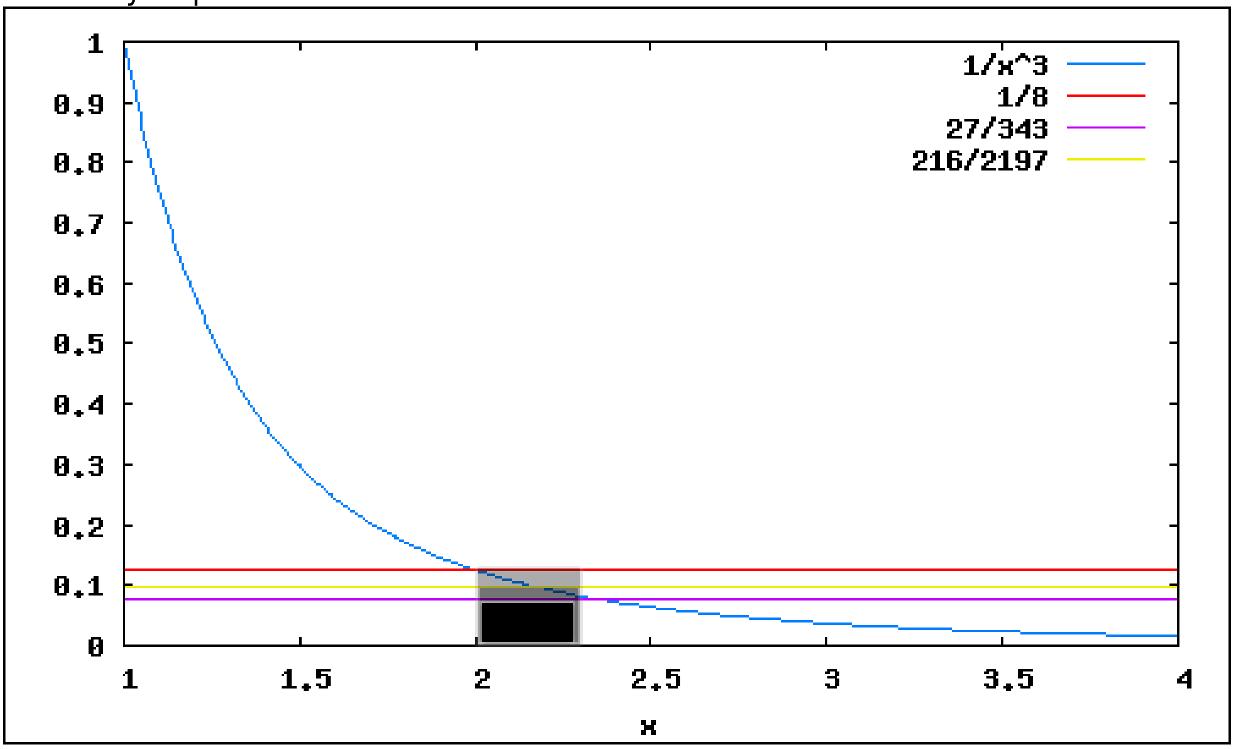
| X arvot(Alku+d/2+askel*d) | f(X) | Pinta alat (f(X)*(d)) |
|---|---|---|
| 2+1/6+(1/3*0)=2 1/6 | 0.098315885298134 | 0.032771961766045 |
| 2+1/6+(1/3*1)=2 ½ | 0.064 | 0.021333333333333 |
| 2+1/6+(1/3*2)=2 5/6 | 0.043964990840627 | 0.014654996946876 |

0.032771961766045+0.021333333333333+0.014654996946876=0.068760292046254

Ytl(5/72)=0.069444444444444

**Vastaus: 0.069**

Tämä näyttä paras vaihtoehdolta. Katsotaan kuva:




Jo – keskipiste menetelmä näyttä peittävään tasopainoisempi.

## *2. Laske (1.1) puolisuunnikassäännöllä. (3 jakoväliä)*

Meillä taas väli on d=1/3 (|2-3|/3=1/3)

Suunnikkaiden pisteet ovat sitten:

Etäisyys origosta 2,2 1/3, 2 2/3,3

Vastaava korkeus $\frac{1}{2^3}, \frac{1}{(2\frac{1}{3})^3}, \frac{1}{(2\frac{2}{3})^3}, \frac{1}{3}$

Ja pinta-ala sitten on

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| f(x) | 0.125 | 0.078717201166181 | 0.052734375 | 0.037037037037037 |
| x | 2 | 2 1/3 | 2 2/3 | 3 |

Ja tulos sitten on(0.125+0.078717201166181)/(2*3)+(0.078717201166181+0.052734375)/(2*3)+(0.052734375+0.037037037037037)/(2*3)=0.0708233648949

Float(5/72)=0.069444444444444, eli ihan hyvä... Verrattuna edellisen tehtävän tulokseen, mutta verrataan niitä tarkempi myöhemmin.

Pyöristetään kolmelle desimaalille vastauksen, saadaan:

**Vastaus: 0.071**

## *3. Laske (1.1) Simpsonin säännöllä (2 ja 4 jakoväliä)*

Nyt meillä on muita jakoväliä. a) |2-3|/2=0.5 b) |2-3|/4=0.25

a) x:t ovat 2;2.5;3 kun d on 0.5

y:t vastaavasti ovat 0.125, 0.064 ja 0.037037037037037

Eli

0.5/3*(0.125+4*0.064+0.037037037037037)=0.069672839506173

Float(5/72)=0.069444444444444, tämä näyttää ihan hyvältä, mutta verrataan siihen myöhemmin.

**Vastaus: 0.070**

b) x:t ovat 2;2.25;2.5;2.75;3 kun d on 0.25
y:t vastaavasti ovat 0.125, 0.087791495198903, 0.064, 0.048084147257701 ja 0.037037037037037.
Eli tulos sitten on

0.25/3*( 0.125+4*0.087791495198903+2*0.064+4*0.048084147257701+0.037037037037037)=0.069461633905288

Float(5/72)=0.069444444444444, ja tämä pyöristettynä näyttää jo aika hyvältä.

**Vastaus: 0.069**

### *3.5 Oma ajatus, ”Junolaisen menetelmä”*

Tuli tässä mieleen – jos me otetaan jakovälin keskipiste, katsotaan mikä käyrän tangentti menisi sen läpi, ja sitten laskettaisi puolisuunnikkaan pinta-ala, joka on rajoitettu tangentilla jakovälin alku ja loppupisteellä.

Alusta löydämme tangentin kulmakerroin, joka on käyrään derivaatta

$$(1/x^3)'=-(3/4x^4)$$

Eli tangentin näkö tässä tapauksessa pistellä *z* on

$$y=(-3/4z^4)*x+c$$

Ja *c* pistellä *z* voidaan johtaa:

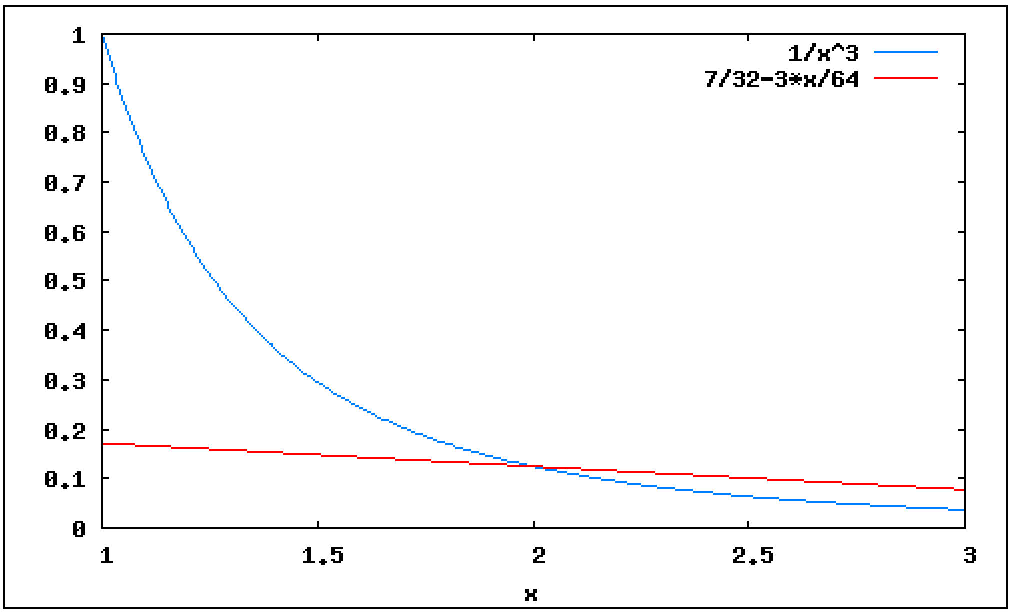
$(-3/4z^4)*z+c=1/z^3$ :sta

Eli

$$c=7/(4*z^3)$$

Tarkistetaan käyrän ja tangentin ulkonäkö pisteessä 2. c=7/32, eli käyrä on

y=(-3/4*2^4)*x+7/32




Ok. Yritetään sitä kahdessa välissä, siis löydetään kaksi tangenttia, pisteessä (2+2.5)/2 ja (2.5+3)/2, ja lasketaan sitten [2;2.5] ensimmäiselle tangentille pinta-ala, ja [2.5;3] toiselle.

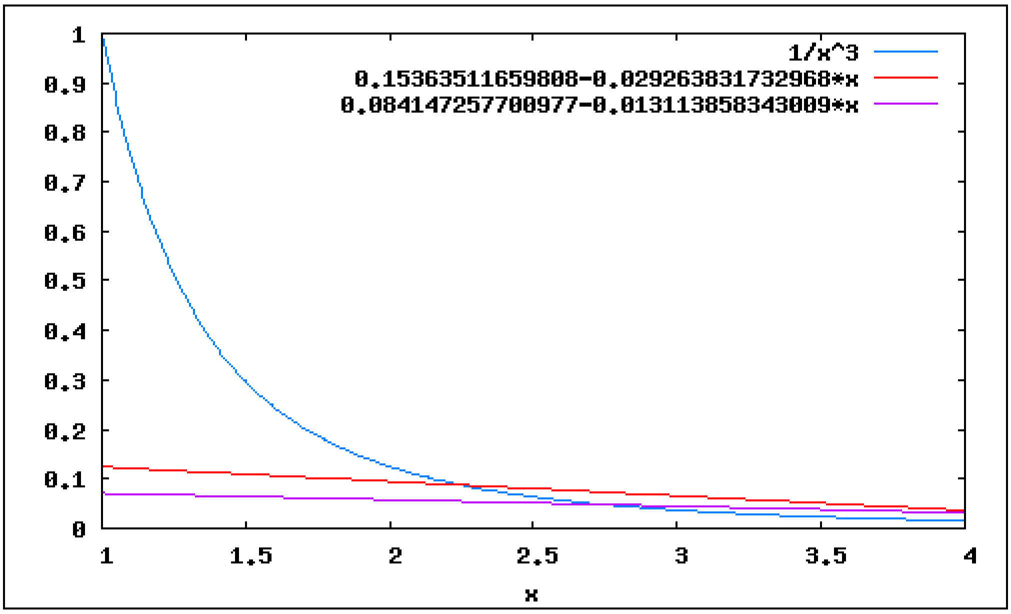
(2+2.5)/2=2.25, siis tangentti 1 on

y=(-3/(4*2.25^4))*x+7/(4*2.25^3)

ja tangentti 2 on

y=(-3/(4*2.75^4))*x+7/(4*2.75^3)

Ulkonäön tarkastus:




Eli aika hyvä. Tangentti 1 rajapisteet:

t1(2)=0.095107453132144

t1(2.5)=0.080475537265661

Tangentti 2

t2(2.5)=0.051362611843453

t2(3)=0.044805682671949

Nyt lasketaan pinta-alat:

((t1(2)+t1(2.5))/2)*0.5+((t2(2.5)+t2(3))/2)*0.5=**0.067937821228302**, pyöristettynä 0.068... Aika hyvä. Entäs jos tehdään neljä tangenttia?

Rajat: (2-2.125-2.25),(2.25-2.375-2.5),(2.5-2.625-2.75),(2.75-2.875-3)

t1(x)=(-3/(4*2.125^4))*x+7/(4*2.125^3)

t2(x)=(-3/(4*2.375^4))*x+7/(4*2.375^3)

t3(x)=(-3/(4*2.625^4))*x+7/(4*2.625^3)

t4(x)=(-3/(4*2.875^4))*x+7/(4*2.875^3)

Ja pinta-ala sitten...

(t1(2)+t1(2.25))/8+(t2(2.25)+t2(2.5))/8+(t3(2.5)+t3(2.75))/8+(t4(2.75)+t4(3))/8=

0.069056601680925. Myös aika hyvä, kuitenkin siirretään seuraavalle tehtävälle

## 4. Vertaus

Tarkka arvo meillä on 5/72, määritetään sitä K:lle.

Suhteellinen virhe sitten on |K-vastaus|/K*100%.

Siis, tehtävälle 1 voidaan sanoa:

|(5/72-(0.041666666666667+0.026239067055394+0.017578125))|/(5/72)=0.2309675655976782 (*100%, ja pyöristetään kahdelle desimaalille)

23.10% - tehtävä 1a suhteellinen virhe.

b) |(5/72-(0.037037037037037+0.017578125+0.012345679012346))|/(5/72)=0.035763888888885 (*100%)
3.58% - 1b
ja c)
|(5/72-(0.032771961766045+0.021333333333333+0.014654996946876))|/(5/72)= 0.0098517945339424 (*100%)
0.99% - 1c
Sitten
|5/72-((0.125+0.078717201166181)/(2*3)+(0.078717201166181+0.052734375)/(2*3)+(0.052734375+0.037037037037037)/(2*3))|/(5/72)=0.069247712875292 (*100%)

6.92% - tehtävä 2 suhteellinen virhe.

Sitten 3, a ja b

a)

|(5/72-0.5/3*(0.125+4*0.064+0.037037037037037))|/(5/72)=0.0032888888888887 (*100%)

0.33% tehtävä 3a) suhteellinen virhe

b)

|(5/72-(0.25/3*( 0.125+4*0.087791495198903+2*0.064+4*0.048084147257701+0.037037037037037)))|/(5/72)=0.00024752823614344611 (*100%)

0.02% tehtävä 3b) suhteellinen virhe

Sitten – katsotaan mitä vastaus(1)3.5 ja vastaus (2)3.5 antavat:

(1)

|(5/72-0.067937821228302)|/(5/72)=0.021695374312451 (*100%)

Eli 2.17%

(2)

(5/72-0.069056601680925)/(5/72)=0.00558493579468 (*100%)

Eli 0.56%

**Vastaus**

| | | |
|---|---|---|
| Suorakaide(alku) | (3)23.10% | ----- |
| Suorakaide(loppu) | (3)3.58% | ----- |
| Suorakaide(keski) | (3)0.99% | ----- |
| Puolisuunnikas | (3)6.92% | ----- |
| Simpson | (2)0.33% | **(4)0.02%** |
| Junolainen | (2)2.17% | (4)0.56% |

**Päätös: Simpsonin menetelmä on tehokampi neljässä jakovälissä se antaa todella pienen virheen. Suorakaide menetelmä (A) on pahin. Simpsonin ja Junolaisen menetelmät ovat tehokampi kuin suorakaide ja puolisuunnikas menetelmät, kuitenkin Simpsonin menetelmä on tehokampi, edes kahdella jakovälillä se antaa tarkempi vastauksen. Suorakaide menetelmä keskipisteestä antaa tarkempi vastaus kolmessa jakovälissä, kun Junolaisen menetelmä kahdessa... Mutta tästä on vaikea tehdä joku lopullinen päätös, se vain on näin.**

Työhön oli käytetty: Maxima (http://wxmaxima.sourceforge.net/), OpenOffice (http://openoffice.org), Paint.NET(www.getpaint.net/).

**Päivämäärä: 27.11.09**